METODE NUMERICE ÎN INGINERIE

APROXIMAREA FUNCŢIILOR

Aspecte generale

Utilitatea aproximării funcţiilor pe cale numerică:

- **funcţia care trebuie prelucrată are o expresie analitică foarte complicată;**
- **funcţia nu are o expresie analitică cunoscută şi este dată sub formă tabelară.**

Metode de rezolvare a aproximării funcţiilor:

- **aproximarea prin interpolare;**
- **aproximarea folosind funcţii spline;**
- **aproximarea după metoda celor mai mici pătrate.**

Aspecte generale

Aproximarea funcțiilor prin interpolare

Se considera o funcție original f(X) definită sub formă tabelară:

x	x_0	x_2	....	x_n
f	f_0	f_2	....	f_n

$$f : [x_0, x_n] \rightarrow R$$

Criteriul de interpolare – determina funcția de aproximare F(X) impunând condiția ca funcția de aproximare sa coincidă cu funcția original f(X) în punctele de definiție a acestei funcții:

$$F(X_k) = f_k \qquad (1)$$

După forma funcțiilor de interpolare se disting următoarele tipuri de interpolări:

- Interpolare polinomială;
- Interpolare rațională;
- Interpolare logaritmică.

Aspecte generale

Forma generala: $$F(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + \cdots + a_n F_n(x) \quad (2)$$

Interpolarea polinomială: $$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (3)$$

Interpolare exponenţială: $$E(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \cdots + a_n e^{nx} + b_1 e^{-x} + \cdots + b_n e^{-nx} \quad (4)$$

Interpolarea trigonometrică: $$T(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx \quad (5)$$

Interpolarea polinomială

Forma generala: $$F(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + \cdots + a_n F_n(x) \tag{6}$$

In cazul expresiei (6) se pune problema găsirii coeficienților *ak* (*k* = 0, ..., *n*) din condiția de interpolare, adică a rezolvării sistemului de ecuații liniare:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$[V][A] = [f] \rightarrow [A] = [V]^{-1}[f] \tag{8}$$

Diferenţe finite

Fie funcția $f : [a, b] \to R$ şi reţeaua de puncte (noduri) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ presupuse echidistante.

Pasul de discretizare: $\Delta x = h = x_{k+1} - x_k$.

Dacă $f(x_k) = y_k$, atunci:

$$\Delta f(x_k) = \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$ ← diferenţă finită progresivă de ordinul întâi

$$\Delta^2 y_k = \Delta(y_{k+1} - y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$ ← diferenţă finită progresivă de ordinul doi

$$\Delta^3 y_k = \Delta^2(y_{k+1} - y_k) = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k = (y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1}) - \\ -(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) = y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k$$ ← diferenţă finită progresivă de ordinul trei

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k \quad k = \overline{0, n-k}$$ ← diferenţă finită progresivă de ordinul "i"

Diferenţe finite

Tabelul 1. Tabel orizontal de diferențe finite

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

Tabelul 2. Tabel diagonal de diferențe finite

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Aproximarea cu polinome de interpolare Lagrange

Fie funcția reală $f: [a, b] \to R$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reprezentând n puncte din intervalul de definiție $[a, b]$, pentru care se cunosc valorile $f(x_k)$.

Forma polinomului de interpolare:

$$F_L(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot L_k(x) \tag{13}$$

$$L_k(x) = \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_k - x_2} \cdots \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_k - x_n} = \tag{14}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 1, n$$

Pentru $n = 2$:

$$F_L(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) \tag{15}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}; \quad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{16}$$

Aproximarea cu polinome de interpolare Lagrange

Funcțiile cardinal reprezintă polinoame având gradul *n* care satisfac o condiție de tipul:

$$L_k(x_i) = \begin{Bmatrix} 0 & daca & k \neq i \\ 1 & daca & k = i \end{Bmatrix} = \delta_{ki} \tag{17}$$

Pentru a demonstra că **polinomul trece prin punctele de interpolare**, **în relaţia (13) se va înlocui *x* cu *x*:**

$$F_L(x_i) = \sum_{k=1}^{n} f_k L_k(x_i) \tag{18}$$

$$F_L(x_i) = \sum_{k=1}^{n} f_k \delta_{ki} = y_i \tag{19}$$

Eroarea de aproximare cu polinoame Lagrange:

$$f(x) - F_L(x) = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{n!} \cdot f^{(n)}(\varepsilon) \tag{20}$$

Aproximarea cu polinome de interpolare Newton

Fie o funcție $f : [a, b] \to R$, pentru care se cunosc valorile $f(x_k) = y_k$ în nodurile x_k (k=0, ..., n) presupuse echidistante: $x_k = x_1 + k \cdot h$.

Formă generală a polinomului de interpolare Newton:

$$N_n(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)(x - x_1)a_2 + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})a_n \tag{21}$$

Algoritmul determinării coeficienților $a_0, a_1, \ldots, a_n$

- **Determinarea coeficienților a_0 și a_1**

$$N_1(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 \tag{22}$$

$$N_1(x_0) = a_0 + (x_0 - x_0)a_1 = y_0 \to \boxed{a_0 = y_0} \tag{23}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \Delta f_0} \tag{24}$$

Aproximarea cu polinome de interpolare Newton

- **Determinarea coeficientului *a*2:**

$$N_2(x)=N_1(x)+(x-x_0)(x-x_1)a_2=a_0+(x-x_0)a_1+(x-x_0)(x-x_1)a_2$$

$$N_2(x_2)=a_0+(x_2-x_0)a_1+(x_2-x_0)(x_2-x_1)a_2=y_2$$

$$a_2=\frac{y_2-a_0-a_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{y_2-y_0-\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$

$$=\frac{y_2-y_1+y_1-y_0-\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x_2-x_1+x_1-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\boxed{=\frac{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}=\frac{\Delta f_1-\Delta f_0}{x_2-x_0}=\Delta^2 f_0}$$

Aproximarea cu polinome de interpolare Newton

- **Determinarea coeficientului *a*n:**

$$\boxed{a_n = \frac{\Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0}{x_n - x_0} = \Delta^n f_0} \qquad (25)$$

Tabelul 3. Calculul diferențelor divizate

x_k	y_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$
x_0	y_0	$\Delta f_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	$\Delta^2 f_0 = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{x_2 - x_0}$	$\Delta^3 f_0 = \frac{\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0}{x_3 - x_0}$
x_1	y_1	$\Delta f_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\Delta^2 f_0 = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{x_3 - x_1}$	-
x_2	y_2	$\Delta f_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	-	-
x_3	y_3	-	-	-

Aproximarea folosind metoda celor mai mici pătrate

Determină funcţia de aproximare *F*(*x*) impunând condiţia ca suma pătratelor distanţelor dintre funcţia *f*(*x*) şi cea de aproximare *F*(*x*) în nodurile de interpolare să fie minimă.

Modelarea matematică a criteriului celor mai mici pătrate:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\left(f(X_k)-F(X_k)\right)^2=\sum_{k=0}^{n}(f_k-F(X_k))^2=\min \qquad \textbf{(26)}$$

După forma funcţiei de aproximare F(X) putem avea:

- **regresie polinomială;**
- **regresie exponenţială;**
- **regresie logaritmică, etc.**

Aproximarea folosind metoda celor mai mici pătrate

Regresia polinomială

Forma funcţiei de aproximare:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \qquad \textbf{(27)}$$

Expresia funcţia obiectiv:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(f_k - \sum_{i=0}^{p} \left(a_i x_k^i\right)\right)^2 = \min \qquad \textbf{(28)}$$

Determinarea coeficienţilor se face plecând de la anularea derivatelor lui S în raport cu a_j:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2\sum_{k=0}^{n}\left(f_k - \sum_{i=0}^{p} a_i x_k^i\right)\cdot \frac{\partial}{\partial a_j}\left(f_k - \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{p} a_i x_k^i - a_j x_k^j\right) =$$

$$= -2\sum_{k=0}^{n}\left(f_k - \sum_{i=0}^{p} a_i x_k^i\right) x_k^j = 0, \qquad j = 0 \,..,\, p \qquad \textbf{(29)}$$

Aproximarea folosind metoda celor mai mici pătrate

Regresia polinomială

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} a_i x_k^{i+j} = \sum_{k=0}^{n} f_k x_k^j \qquad j=1,\dots,p$$

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} = \sum_{k=0}^{n} f_k x_k^j \qquad j=1,\dots,p \tag{30}$$

$$\begin{cases} na_0 + \sum_{k=0}^{n} a_1 x_k + \dots + \sum_{k=0}^{n} a_p x_k^p = \sum_{k=0}^{n} f_k \\ \sum_{k=0}^{n} x_k a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_1 x_k^2 + \dots + \sum_{k=0}^{n} a_p x_k^p = \sum_{k=0}^{n} f_k x_k \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \sum_{k=0}^{n} x_k^p a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_1 x_k^p + \dots + \sum_{k=0}^{n} a_p x_k^{2p} = \sum_{k=0}^{n} f_k x_k^p \end{cases} \tag{31}$$

Aproximarea folosind metoda celor mai mici pătrate

Regresia polinomială

Forma matriceală: $$[X][a]=[b]$$ **(32)**

$$[X]=\begin{bmatrix} n & \sum_{k=0}^{n} x_k & \cdots\cdots & \sum_{k=0}^{n} x_k^p \\ \sum_{k=0}^{n} x_k & \sum_{k=0}^{n} x_k^2 & \cdots\cdots & \sum_{k=0}^{n} x_k^p \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{k=0}^{n} x_k^p & \sum_{k=0}^{n} x_k^p & \cdots\cdots & \sum_{k=0}^{n} x_k^{2p} \end{bmatrix} \qquad [b]=\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} f_k \\ \sum_{k=0}^{n} f_k x_k \\ \cdots\cdots \\ \sum_{k=0}^{n} f_k x_k^p \end{bmatrix}; \qquad [a]=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix}$$ **(33)**

Aproximarea folosind metoda celor mai mici pătrate

Regresia liniară

Forma funcţiei de aproximare:

$$F(x) = a_0 + a_1 x \tag{34}$$

Expresia funcţia obiectiv:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(f_k - a_0 - a_1 x\right)^2 \tag{35}$$

Determinarea coeficienţilor se face plecând de la anularea derivatelor lui S în raport cu a_j:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{k=0}^{n} 2(f_k - a_0 - a_1 x_k)(-1) = 2\left(-\sum_{k=0}^{n} f_k + n a_0 + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{k=0}^{n} 2(f_k - a_0 - a_1 x_k)(-x_k) = 2\left(-\sum_{k=0}^{n} x_k f_k + a\sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^2\right) = 0 \tag{36}$$

Aproximarea folosind metoda celor mai mici pătrate

Regresia liniară

$$\begin{cases} a_0 + \bar{x} a_1 = \bar{f} \\ a\bar{x} + \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2 \right) a_1 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k f_k \end{cases} \qquad \textbf{(37)}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} x_k ; \qquad \bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f_k ; \qquad \textbf{(38)}$$

$$a_0 = \frac{\bar{f} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2 - \bar{x} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k f_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2 - n\bar{x}^2} ; \qquad a_1 = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k f_k - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{f}}{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2} \qquad \textbf{(39)}$$

$$a_1 = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} f_k (x_k - \bar{x})}{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k (x_k - \bar{x})} ; \qquad a_0 = \bar{f} - \bar{x} a_1 \qquad \textbf{(40)}$$